Capítulo 3

Características Básicas del Modelo $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$

En este capítulo se muestran las características principales de los modelos con simetría de gauge $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, o “modelos 331”. Se examina en particular una versión de estos modelos que incluye tres tripletes de campos escalares, capaces de producir los rompimientos de simetría necesarios para reducirse al modelo estándar de partículas elementales en el límite de bajas energías [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30].

3.1. Generadores del Grupo $SU(3)_L \otimes U(1)_X$

Como se mencionó en el capítulo anterior, el ME electrodébil esta basado en el grupo de simetría de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. De igual forma, en el capítulo 2 se hizo alusión a algunas limitaciones y/o problemas abiertos del mismo. El objetivo del presente trabajo doctoral es estudiar la posible extensión de esta simetría al grupo $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ y analizar sus consecuencias.

De acuerdo a la definición de las representaciones de un grupo unitario especial ec. (2.1) (en adelante notaremos a las representaciones de los generadores mediante G_a), tenemos para $SU(3)$ que los generadores del grupo pueden ser representados, en la representación fundamental, mediante las matrices $G_1, \ldots, G_8$

$$G_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$G_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$G_7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

que corresponden a 8 matrices hermíticas con traza nula. Éstas a su vez están normalizadas mediante $Tr(G_a G_b) = \delta_{ab}/2$ y cumplen el álgebra de Lie:

$$[G_a, G_b] \ = \ i f_{abc} G_c \,, \tag{3.2}$$

donde f_{abc} son las constantes de estructura de $SU(3)$.

Para el grupo $U(1)_X$, el generador G_0 vendrá dado por $G_0 = \lambda \mathbf{1}$. En la representación anterior y con la normalización $Tr\, G_0^2 = 1/2$, se tendrá

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

3.2. Subgrupo $U(1)_Q$

Dado que los modelos 331 deben ser compatibles con el modelo estándar, es necesario generar el subgrupo $U(1)_Q$ a partir del $SU(3)_L \otimes U(1)_X$, o equivalentemente, obtener una representación de la carga dentro de este grupo extendido. Mediante el uso de los generadores diagonales del grupo $SU(3)_L \otimes U(1)_X$, podemos construir una relación semejante a la de Gell Mann-Nishijima ec.(2.8), que debe contener la información de la carga electromagnética,

$$\hat{Q} = \alpha \hat{T}_3 + \beta \hat{T}_8 + \gamma \hat{T}_0 \,, \tag{3.4}$$

o lo que es lo mismo, mediante las representaciones matriciales de los generadores del grupo tenemos:

$$Q = \alpha G_3 + \beta G_8 + \gamma G_0 \,. \tag{3.5}$$

Ahora bien, considerando la relación para el ME ec.(2.8) y extendiéndola a la ec.(3.5), llegamos a la conclusión de que para que se reproduzca el ME a partir del modelo que estamos desarrollando, se debe cumplir que $\alpha = 1$ (debido a que $SU(2)_L$, subgrupo de $SU(3)_L$, se obtiene mediante los generadores G_1, G_2 y G_3), e $Y = \beta G_8 + \gamma G_0 = \beta G_8 + X$. En la representación fundamental

$$X = \gamma G_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X\,\mathbf{1}\,, \tag{3.6}$$

de esta forma podemos escribir de una forma más compacta el generador $\hat{Q}$ en esta representación como

$$Q = G_3 + \beta G_8 + X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}} + X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}} + X & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta}{\sqrt{3}} + X \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Por otra parte debemos mencionar aquí que la introducción del operador $\hat{X}$ en este modelo nos genera una regla de transformación para los campos,

$$[\hat{X}, \psi] = X_\psi \psi\,, \tag{3.8}$$

donde, como se verá mas adelante, el número cuántico X_ψ es característico del campo que se esté considerando.

Es importante resaltar que β es un parámetro libre [31, 32]. Por lo tanto, en principio pueden construirse infinitos modelos 331.

3.3. Representación de los campos

De acuerdo con la simetría del grupo de gauge, los fermiones del modelo se incluyen en la siguiente representación en tripletes para los campos izquierdos,

$$q_{L_{SU(3)}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \qquad \ell_{L_{SU(3)}} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Es fácil ver que esto permite un contenido mínimo de nuevos fermiones con respecto a las partículas presentes en el ME.

3.4. Derivada Covariante

Tras implementar el principio de gauge en este modelo, sabemos que a fin de preservar la invariancia de gauge local, los términos cinéticos deben estar escritos en términos de derivadas covariantes, como se mostró en la sección 2.5. En el modelo 331, la derivada covariante tomará la siguiente forma:

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^\alpha \hat{T}_\alpha - ig'\hat{X}B_\mu\,. \tag{3.10}$$

donde $\hat{T}_\alpha$ y $\hat{X}$ son los generadores de $SU(3)_L$ y $U(1)_X$ respectivamente, y g y g' son las constantes de acoplamiento asociadas a los respectivos grupos.

Para fines posteriores se muestra explícitamente aquí la matriz W_μ, en la representación fundamental introducida en ec.(3.1):

$$W_\mu = W_\mu^\alpha G_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}W_\mu^8 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 & W_\mu^4 - iW_\mu^5 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}W_\mu^8 & W_\mu^6 - iW_\mu^7 \\ W_\mu^4 + iW_\mu^5 & W_\mu^6 + iW_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}W_\mu^8 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Por otra parte, también se hace imprescindible encontrar la carga de los bosones de gauge, ya que como se verá posteriormente, esta identificación nos ayudará a desarrollar la fenomenología del modelo. A partir de la definición de la carga surge para los mediadores, la siguiente relación:

$$[Q, W_{j\mu}] = [\hat{T}_3, W_{j\mu}] + \beta[\hat{T}_8, W_{j\mu}] + [\hat{X}, W_{j\mu}] \tag{3.12}$$

y se obtienen las cargas mostradas en el cuadro 3.1.

Cuadro 3.1: Cargas de los Bosones de Gauge

Estado	Carga
$W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}W_\mu^8$	0
$-W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}W_\mu^8$	0
$-\frac{2}{\sqrt{3}}W_\mu^8$	0
$W_\mu^1 \mp iW_\mu^2$	± 1
$W_\mu^4 \mp iW_\mu^5$	$\pm(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\beta}{2})$
$W_\mu^6 \mp iW_\mu^7$	$\pm(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\beta}{2})$

3.5. Rompimiento de Simetría

A fin de generar el rompimiento espontáneo de simetría en los modelos 331, debe proponerse un sector escalar con campos Φ_i organizados en multipletes de $SU(3)_L$. En general, en estos modelos se distinguen dos escalas de energía a las cuales se produce el rompimiento, lo cual puede representarse mediante el siguiente esquema

$$SU(3)_L \otimes U(1)_X \stackrel{\Phi_1}{\rightarrow} SU(2)_L \otimes U(1)_Y \stackrel{\Phi_2}{\rightarrow} U(1)_Q \tag{3.13}$$

La interpretación del primer rompimiento de simetría impone la existencia de una escala alta de energía (relacionada con Φ_1) que se rompe con la finalidad de generar un subgrupo que contenga la base del ME. De esta forma, en esta "primera" ruptura, los generadores que deben ser anulados por el vacío son $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$ e $\hat{Y} = \beta\hat{T}_8 + X$, en tanto que los restantes generadores no diagonales y la combinación $\beta\hat{T}_8 - X$, ortogonal a $\hat{Y}$, no deben anularse al romper espontáneamente la simetría. Esto es:

$$[\hat{T}_{1,2,3}, \hat{\Phi}_1]_0 = 0 \;\; \text{y} \;\; [\beta\hat{T}_8 + X, \hat{\Phi}_1]_0 = 0 \tag{3.14}$$

$$[\hat{T}_{4,5,6,7}, \hat{\Phi}_1]_0 \neq 0 \;\; \text{y} \;\; [\beta\hat{T}_8 - X, \hat{\Phi}_1]_0 \neq 0 \tag{3.15}$$

donde

$$[\hat{O}]_0 = \langle 0|\hat{O}|0\rangle \tag{3.16}$$

Para la parte final del esquema de rompimiento causado por el campo escalar Φ_2, al igual que lo que sucede en el ME, no se deben anular por el vacío los generadores $\hat{T}_1, \hat{T}_2$ y $\hat{T}_3 - \hat{Y}$, mientras que $\hat{Q} = \beta\hat{T}_3 + \hat{Y}$ se anula, es decir:

$$[\hat{T}_{1,2}, \hat{\Phi}_2]_0 \neq 0 \;\; \text{y} \;\; [\beta\hat{T}_3 - \hat{Y}, \hat{\Phi}_2]_0 \neq 0 \tag{3.17}$$

$$[\beta\hat{T}_3^L + \hat{Y}, \hat{\Phi}_2]_0 = 0\,. \tag{3.18}$$

De esta manera se asegura que el segundo rompimiento de simetría, sigue la dinámica propia del ME.

3.6. Términos de Yukawa

El siguiente paso lógico a realizarse en la construcción del presente modelo, es encontrar la forma más simple posible para los campos escalares que nos reproduzca la dinámica conocida en el ME. Para ayudarnos a encontrar dichas características, utilizaremos el Lagrangiano de Yukawa.

La forma más general de los términos de Yukawa puede escribirse mediante el siguiente Lagrangiano [33]:

$$\mathcal{L}_Y = \bar{\psi}\psi\Phi + \bar{\psi}(\psi)^c\Phi + \overline{(\psi)^c}\psi\Phi^\dagger + \overline{(\psi)^c}(\psi)^c\Phi^\dagger\,, \tag{3.19}$$

donde el superíndice **c** denota la operación de conjugación de carga.

Separando las componentes de distinta quiralidad, podemos reescribir el lagrangiano de Yukawa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y &= \bar{\psi_L}\psi_R\Phi + \bar{\psi_R}\psi_L\Phi^\dagger + \bar{\psi_L}(\psi_L)^c\Phi + \overline{(\psi_L)^c}\psi_L\Phi^\dagger + \bar{\psi_R}(\psi_R)^c\Phi \\ &\quad +\overline{(\psi_R)^c}\psi_R\Phi^\dagger + \overline{(\psi_L)^c}(\psi_R)^c\Phi^\dagger + \overline{(\psi_R)^c}(\psi_L)^c\Phi \\ &= \bar{\psi_L}\psi_R\Phi + \bar{\psi_L}(\psi_L)^c\Phi + \bar{\psi_R}(\psi_R)^c\Phi + \overline{(\psi_R)^c}(\psi_L)^c\Phi + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Si se tiene en cuenta que este lagrangiano contiene campos en distintas representaciones, es decir, $\psi_{iL} : 3$, $\psi_{iL}^c : 3^*$ y $\psi_R : 1$ y que los términos de Yukawa para este modelo deben ser invariantes bajo $SU(3)$, se pueden analizar las distintas combinaciones posibles. Para ello examinamos explícitamente los siguientes términos;

a)

$$\bar{\psi_L}\psi_R\Phi \quad : \quad 3^* \otimes 1 \otimes R(\hat{\Phi}) \supseteq 1$$

b)

$$\bar{\psi_L}(\psi_L)^c\Phi \quad : \quad 3^* \otimes 3^* \otimes R(\hat{\Phi}) \supseteq 1$$

c)

$$\bar{\psi_R}(\psi_R)^c\Phi \quad : \quad 1 \otimes 1 \otimes R(\hat{\Phi}) \supseteq 1$$

d)

$$\overline{(\psi_R)^c}(\psi_L)^c\Phi \quad : \quad 1 \otimes 3^* \otimes R(\hat{\Phi}) \supseteq 1 \tag{3.21}$$

donde en el lado derecho se está mostrando el producto de las representaciones, se ha supuesto que el escalar en estudio se encuentra en la representación $R(\hat{\Phi})$ y se ha tenido en cuenta que el lagrangiano de Yukawa debe ser invariante bajo el grupo $SU(3)_L$. De este modo, se observa que debe ser necesario considerar al menos las representaciones $\mathbf{3}^*$, **3** según a) y d), la **1** según c) y la simétrica **6** según b). Usando las ecs. (3.14) y (3.15) para campos escalares cuyos valores esperados en el vacío produzcan la primera ruptura de simetría de $SU(3)_L$ y (3.17) y (3.18) para campos escalares para la segunda ruptura, se llega fácilmente a encontrar los escalares que se ajustan a todas las condiciones. La estructura para estos campos en la representación **3** está consignada en el cuadro 3.2.

Cabe destacar aquí que el campo escalar η es usualmente introducido en el modelo para asegurar que todos los campos fermiónicos en el lagrangiano de Yukawa adquieran masa. Sin embargo, recientemente en la literatura [32, 34, 35, 36] se ha mostrado que no es estrictamente necesario incluir este tercer triplete para dotar de masa a todas las

Cuadro 3.2: Espectro de escalares y valores de expectación de vacío en el modelo 331 "mínimo"

	$\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\beta \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\langle\chi\rangle_0$	$\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}$
X_χ	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{\beta}{3}$
$\langle\rho\rangle_0$	$\begin{pmatrix}0\\v\\\omega\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\v\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\v\\0\end{pmatrix}$
X_χ	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{3}}$
$\langle\eta\rangle_0$	$\begin{pmatrix}u\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}u\\0\\\omega\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}u\\0\\0\end{pmatrix}$
X_χ	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{3}}$

partículas del modelo, sino que los tripletes encargados de los rompimientos de simetría pueden tomar la forma

$$\langle\chi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}u\\0\\\omega\end{pmatrix} \quad , \langle\phi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\\0\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

donde ambos se encuentran en la representación **3**. Esta estructura del sector escalar corresponde modelo conocido en la literatura como "económico". Sin embargo, este modelo tiene un inconveniente que ha sido objeto de estudio recientemente [37]: los acoplamientos de Yukawa para el sector de quarks generan matrices de masa con determinante nulo. Esto implica que las masas de algunos quarks se obtengan a partir de correcciones radiativas. Adicionalmente en estos modelos "económicos" pueden construirse potenciales de Higgs para diferentes valores del parámetro β con estos dos escalares, siempre y cuando se asegure que los acoplamientos sean invariantes de gauge. Dichos posibles potenciales no permiten violación espontánea de CP [38, 39, 40]. Finalmente, existen modelos 331 que incluyen sextupletes de escalares [38, 29]. Estas teorías tienen el problema de conducir en general a la presencia de neutrinos muy masivos.

3.7. Anomalías quirales en modelos 331

Teniendo en cuenta el análisis realizado en la sección 2.10 retomaremos el problema de la existencia de anomalías quirales a fin de preservar la simetría de gauge a todo orden en teoría de perturbaciones para este modelo.

Como vimos en la subsección 2.10.1, las anomalías quirales resultan ser proporcionales al coeficiente de anomalía que, generalizado a un grupo $SU(N)$, se define como

$$A_{abc} = 2\sum_{rep} Tr[\{G_a(\hat{T})_L, G_b(\hat{T})_L\}G_c(\hat{T})_L - \{G_a(\hat{T})_R, G_b(\hat{T})_R\}G_c(\hat{T})_R] \tag{3.23}$$

donde G_a son los generadores del grupo $SU(N)$ en la representación en que están organizados los multipletes fermiónicos.

A muy altas energías también deberán incluirse los efectos gravitacionales. Por lo tanto es de interés analizar el coeficiente anomalía gravitacional, dado por

$$\begin{aligned} A_{grav} &= 2\sum_{rep}\Big\{Tr[\{G_a(\hat{T})_L, G_b(\hat{T})_L\}S_i(\hat{T})_L - \{G_a(\hat{T})_R, G_b(\hat{T})_R\}S_i(\hat{T})_R] \\ &\quad + Tr[\{S_i(\hat{T})_L, S_j(\hat{T})_L\}S_k(\hat{T})_L - \{S_i(\hat{T})_R, S_j(\hat{T})_R\}S_k(\hat{T})_R] \\ &\quad + Tr[\{S_i(\hat{T})_L, S_j(\hat{T})_L\}G_a(\hat{T})_L - \{S_i(\hat{T})_R, S_j(\hat{T})_R\}G_a(\hat{T})_R]\Big\} \end{aligned} \tag{3.24}$$

donde $S_{i,j,k}$ corresponde a los generadores del grupo de Poincaré.

Como hemos mencionado previamente, para que una teoría sea renormalizable se exige que $A_{abc} = 0$. De este modo, para los modelos 331, en el caso de tres familias deben cumplirse las siguientes condiciones [31, 41]:

$$\frac{1}{2}A_{aa0} = \pm 3\sum_m (X^L_{q^{(m)}}) - \sum_{sing} X^R_q = 0 \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{2}A_2 = \sum_m (\pm X^L_{\ell^{(m)}}) \pm 3\sum_m (X^L_{q^{(m)}}) = 0 \tag{3.26}$$

$$\frac{1}{4}A_{000} = 3\sum_m (\pm X^L_{\ell^{(m)}})^3 \pm 9\sum_m (X^L_{q^{(m)}})^3 - 3\sum_{sing}(X^R_q)^3 - \sum_{sing}(X^R_\ell)^3 = 0 \tag{3.27}$$

$$A_{grav} = 3\sum_m (\pm X^L_{\ell^{(m)}}) \pm 9\sum_m (X^L_{q^{(m)}}) - 3\sum_{sing} X^R_q - \sum_{sing} X^R_\ell = 0\,, \tag{3.28}$$

donde se ha incluido la condición para la anomalía gravitacional. La cancelación de estas anomalías puede realizarse en el caso más general para cualquier valor del coeficiente β. Se puede mostrar que se satisfacen todas las condiciones para la cancelación de las anomalías si se consideran dos tripletes de quarks en la representación conjugada $\mathbf{3}^*$, uno en la fundamental $\mathbf{3}$ y los tres tripletes leptónicos en la representación fundamental $\mathbf{3}$, o bien si se considera el caso completamente conjugado del anterior. Cabe notar que las dos posibilidades son equivalentes, correspondiendo a valores opuestos del parámetro β. Es debido a esto que consideraremos sólo la primera de las posibilidades mencionadas.

Del ajuste de anomalías surgen las siguientes conclusiones

- *En este tipo de modelos existe un vínculo entre el ajuste de la anomalía quiral, el número de colores de los quarks y el número de familias de quarks. La relación consiste en que al suponer que el número de colores es* 3*, la cancelación de anomalías implica la existencia de tres familias de quarks.*
- *Uno de los tres tripletes de quarks que tiene el modelo debe encontrarse en la representación conjugada a la de los otros dos y en la misma representación en la cual se encuentran los tripletes leptónicos.*

3.8. Espectro de Partículas

Teniendo en cuenta las representaciones de los campos fermiónicos en virtud de las condiciones del ajuste de anomalías y usando la ecuación (3.7), podemos generar el cuadro 3.3, donde se han consignado los números cuánticos Q y X.

3.9. Bosones del Gauge del modelo 331

Los bosones de gauge del modelo fueron introducidos con la derivada covariante [ver ec.(3.11)]. Mediante las definiciones $\sqrt{2}W_\mu^\pm = W_\mu^1 \mp iW_\mu^2$, $\sqrt{2}K_\mu^{\pm Q_1} = W_\mu^4 \mp iW_\mu^5$ y $\sqrt{2}K_\mu^{\pm Q_2} = W_\mu^6 \mp iW_\mu^7$, podemos reescribir la ec. (3.11) en la forma

$$W_\mu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}W_\mu^8 & \sqrt{2}W_\mu^+ & \sqrt{2}K_\mu^{Q_1} \\ \sqrt{2}W^- & -W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}W_\mu^8 & \sqrt{2}K_\mu^{Q_2} \\ \sqrt{2}K_\mu^{-Q_1} & \sqrt{2}K_\mu^{-Q_2} & -\frac{2}{\sqrt{3}}W_\mu^8 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Por otra parte, es conveniente escribir los bosones neutros W_μ^3, W_μ^8 y B_μ [este último, correspondiente al grupo $U(1)_X$] en términos de los estados A_μ, Z_μ y Z'_μ mediante la rotación

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \\ Z'_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_W & \beta S_W & C_W\sqrt{1-\beta^2 T_W^2} \\ -C_W & \beta S_W T_W & S_W\sqrt{1-\beta^2 T_W^2} \\ 0 & -\sqrt{1-\beta^2 T_W^2} & \beta T_W^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ W_\mu^8 \\ B_\mu \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

donde el ángulo de Weinberg θ_W se ha definido mediante

$$T_W = \tan\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+\beta^2 g'^2}} \tag{3.31}$$

siendo g, g' las constantes de acoplamiento asociadas a los grupos $SU(3)_L$ y $U(1)_X$ respectivamente. Puede verse que se satisface la relación

$$\frac{g'}{2S_W C_W} = \frac{g}{2C_W\sqrt{1-(1+\beta^2)S_W^2}} \; . \tag{3.32}$$

3.10. Corrientes Neutras en el modelo 331

Nos interesa aquí estudiar en particular las corrientes neutras en el modelo 331. Consideraremos el caso mas general posible, en donde β es un parámetro arbitrario.

Identificando el campo A_μ como el fotón del ME, para las corrientes electromagnéticas se obtiene el siguiente lagrangiano de interacción

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{em} &= gS_W A^\mu \Bigg[-\frac{1}{3}\overline{D^0}\gamma_\mu D^0 + \frac{2}{3}\overline{U}^0\gamma_\mu U^0 - \overline{L^0}\gamma_\mu L^0 \\ &\quad + \sum_{m=1}^{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{3\beta}{2\sqrt{3}}\right)\overline{J^0}_m\gamma_\mu J_m^0 + \left(\frac{1}{6}-\frac{3\beta}{2\sqrt{3}}\right)\overline{J^0}_3\gamma_\mu J_3^0 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}-\frac{3\beta}{2\sqrt{3}}\right)\overline{E}^0\gamma_\mu E^0\Bigg]\end{aligned} \tag{3.33}$$

donde hemos definido $D^0 = \begin{pmatrix} d_1^0 & d_2^0 & d_3^0\end{pmatrix}^T$, $U^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 & u_2^0 & u_3^0\end{pmatrix}^T$, $L^0 = \begin{pmatrix} e_1^0 & e_2^0 & e_3^0\end{pmatrix}^T$, $J_m^0 = J_1^0, J_2^0$, $E^0 = \begin{pmatrix} E_1^0 & E_2^0 & E_3^0\end{pmatrix}^T$ escritos en la base de interacción. Nótese que para las partículas usuales (D, U, L) este lagrangiano reproduce la interacción electromagnética del ME donde $e = gS_W$. De igual forma podemos determinar las corrientes neutras acopladas al bosón Z. El lagrangiano de interacción correspondiente viene dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^Z &= -\frac{g}{2C_W}Z^\mu \Bigg[\overline{D^0}\gamma_\mu\left(\left(-1+\frac{2S_W^2}{3}\right)P_L + \frac{2S_W^2}{3}P_R\right)D^0 \\ &\quad +\overline{U^0}\gamma_\mu\left(\left(1-\frac{4S_W^2}{3}\right)P_L - \frac{4S_W^2}{3}P_R\right)U^0 \\ &\quad +\overline{L^0}\gamma_\mu((-1+2S_W^2)P_L + 2S_W^2 P_R)L^0 + \overline{\nu^0}\gamma_\mu P_L\nu^0 \\ &\quad +2S_W^2\left(\frac{1}{6}+\frac{3\beta}{2\sqrt{3}}\right)\sum_{m=1}^{2}\overline{J^0}_m\gamma_\mu J_m^0 - 2S_W^2\left(\frac{1}{6}-\frac{3\beta}{2\sqrt{3}}\right)\overline{J^0}_3\gamma_\mu J_3^0 \\ &\quad +2S_W^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3\beta}{2\sqrt{3}}\right)\overline{E}^0\gamma_\mu E^0\Bigg]\end{aligned} \tag{3.34}$$

donde se han tenido en cuenta las definiciones anteriores, se ha incluido $\nu^0 = \begin{pmatrix}\nu_1^0 & \nu_2^0 & \nu_3^0\end{pmatrix}^T$, y donde $P_{L,R} = (1 \mp \gamma_5)/2$ son los proyectores de quiralidad usuales. En el lagrangiano anterior se identifica el bosón Z con el mediador neutro de la interacción débil de ME. Puede verse que la interacción del mismo con las partículas usuales del ME se reproduce correctamente.

Ahora bien, por su parte, para el bosón Z' presente en esta teoría se obtiene el siguiente lagrangiano de interacción

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{Z'} = & -\frac{g'}{2T_W} Z^{\mu\prime} \left[\sum_{m=1}^{2} \overline{D^0}_m \gamma_\mu \left(\frac{P_L}{\sqrt{3}} + \frac{T_W^2 \beta}{3}(P_L - 2P_R) \right) D_m^0 \right. \\
& + \overline{D^0}_3 \gamma_\mu \left(-\frac{P_L}{\sqrt{3}} + \frac{T_W^2 \beta}{3}(P_L - 2P_R) \right) D_3^0 \\
& + \sum_{m=1}^{2} \overline{U^0}_m \gamma_\mu \left(\frac{P_L}{\sqrt{3}} + \frac{T_W^2 \beta}{3}(P_L + 4P_R) \right) U_m^0 \\
& + \overline{U^0}_3 \gamma_\mu \left(-\frac{P_L}{\sqrt{3}} + \frac{T_W^2 \beta}{3}(P_L + 4P_R) \right) U_3^0 \\
& + \overline{L^0} \gamma_\mu \left(-\frac{P_L}{\sqrt{3}} - T_W^2 \beta (P_L + 2P_R) \right) L^0 + \overline{\nu^0} \gamma_\mu \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - T_W^2 \beta \right) P_L \nu^0 \\
& + \sum_{m=1}^{2} \overline{J^0}_m \gamma_\mu \left(-\frac{2P_L}{\sqrt{3}} + T_W^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{3\beta}{\sqrt{3}} \right) \right) J_m^0 \\
& + \overline{J^0}_3 \gamma_\mu \left(-\frac{2P_L}{\sqrt{3}} + T_W^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{3\beta}{\sqrt{3}} \right) (P_L - P_R) \right) J_3^0 \\
& \left. + \overline{E^0} \gamma_\mu \left(\frac{2P_L}{\sqrt{3}} + T_W^2 \left(-\frac{1}{3} - \frac{3\beta}{\sqrt{3}} \right) (-P_L + P_R) \right) E^0 \right] . \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Se puede ver aquí que los acoplamientos entre los quarks D_i y U_i y el bosón Z' no son universales. El origen de esta no universalidad se debe a que una de las familias de quarks se encuentra en la representación **3**, mientras que las otras dos se encuentran en la $\mathbf{3}^*$ (o viceversa). Esta organización de los fermiones ha sido necesaria para que tenga lugar la cancelación de anomalías. Como consecuencia, al rotar los campos D_i y U_i a la base de autoestados de masa aparecerán corrientes neutras con cambio de sabor (FCNC). Estas interacciones, que en los modelos 331 ocurren a nivel árbol, son uno de nuestros principales objetos de estudio en el presente trabajo de Tesis.

Adicionalmente, el modelo presenta nuevos bosones de gauge K^μ que se acoplan únicamente con las componentes izquierdas de los fermiones. La interacción correspondiente viene dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{K_{1,2}} &= -\frac{\sqrt{2}g}{2}K_1^\mu\left[-\sum_{m=1}^{2}\overline{J^0}_m\gamma_\mu P_L D_m^0 + \overline{U^0}_3\gamma_\mu P_L J_3^0 + \overline{\nu}^0\gamma_\mu P_L E^0\right] + \text{h.c} \\
&\quad -\frac{\sqrt{2}g}{2}K_2^\mu\left[\sum_{m=1}^{2}\overline{J^0}_m\gamma_\mu P_L U_m^0 + \overline{D^0}_3\gamma_\mu P_L J_3^0 + \overline{L}^0\gamma_\mu P_L E^0\right] + \text{h.c} \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

Por último, los acoplamientos de los bosones cargados $W^\pm$ con los fermiones usuales son semejantes a los del ME, esto es

$$
\mathcal{L}_{cc} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\left[\bar{U^0}\gamma_\mu P_L D^0 + \bar{\nu^0}\gamma_\mu P_L L^0\right]W^{\mu+} + \text{h.c.}\,. \qquad (3.37)
$$

Los bosones $W^\pm$ no se acoplan con los nuevos fermiones J_m y E.

3.11. Modelo de 331 con $\beta = \pm 1/\sqrt{3}$

En la sección anterior se presentó el modelo 331 más general posible, esto es, con β arbitrario. En esta sección especificaremos el espectro de partículas y los respectivos acoplamientos con los bosones de gauge de la teoría para el caso particular $\beta = \pm 1/\sqrt{3}$.

Observando los números cuánticos de los fermiones mostrados en el cuadro 3.3 de la sección anterior, vemos que los valores de β que no conducen a valores "exóticos" de las cargas eléctricas son $\beta = \pm 1/\sqrt{3}$. De este modo, de acuerdo con el cuadro 3.3, en estos modelos se tendrán quarks pesados adicionales tipo up, quarks pesados tipo down y leptones pesados con carga eléctrica ± 1 ó 0. Por ejemplo, para tres familias con $\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ obtendremos el espectro mostrado en el cuadro 3.4. Suponemos en este caso que las primeras dos familias de quarks tipo up y tipo down se encuentran en la representación $\mathbf{3}^*$ y la restante en la $\mathbf{3}$, siendo consistentes con las condiciones impuestas por la cancelación de anomalías. Con respecto al sector leptónico, las tres familias se encuentran en la representación $\mathbf{3}$. Teniendo en cuenta el grado de libertad de color se tiene entonces 6 fermiones en cada representación fundamental de $SU(3)_L$.

Por otra parte los bosones de gauge se escriben para $\beta = -1/\sqrt{3}$ en la representación fundamental de acuerdo con la ec.(3.29), con $Q_1 = 0$ y $Q_2 = +1$.

Teniendo en cuenta el contenido fermiónico proveniente del cuadro 3.3, considerando las cargas Q_q y los números cuánticos X_q, al igual que las corrientes obtenidas en la sección 3.10, se encuentra fácilmente el siguiente lagrangiano para las corrientes neutras en el sector de quarks con $\beta = \pm 1/\sqrt{3}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{NC}^{(q)} &= -\frac{gZ^\mu}{2C_W}\left\{\bar{U}^0\gamma_\mu\left[\left(C_W^2-\frac{S_W^2}{3}\right)P_L-\frac{4S_W^2}{3}P_R\right]U^0\right.\\
&\quad -\sum_{n=1}^{N_T^\pm}\frac{4S_W^2}{3}\bar{T}_n^0\gamma_\mu(P_L+P_R)T_n^0\\
&\quad +\bar{D}^0\gamma_\mu\left[\left(-C_W^2-\frac{S_W^2}{3}\right)P_L+\frac{2S_W^2}{3}P_R\right]D^0\\
&\quad \left.+\sum_{m=1}^{N_B^\pm}\frac{2S_W^2}{3}\bar{B}_m^0\gamma_\mu(P_L+P_R)B_m^0\right\}\\
&\quad -\frac{g'Z'^\mu}{2S_WC_W}\left\{\bar{U}^0\gamma_\mu\left[\left(\frac{C_W^2}{\sqrt{3}}\Lambda\pm\frac{S_W^2}{3\sqrt{3}}\right)P_L\pm\frac{4S_W^2}{3\sqrt{3}}P_R\right]U^0\right.\\
&\quad +\bar{D}^0\gamma_\mu\left[\left(\frac{C_W^2}{\sqrt{3}}\Lambda\pm\frac{S_W^2}{3\sqrt{3}}\right)P_L\mp\frac{2S_W^2}{3\sqrt{3}}P_R\right]D^0\\
&\quad +\sum_{n=1}^{N_T^\pm}\bar{T}_n^0\gamma_\mu\left[\mp\frac{2(3C_W^2-2S_W^2)}{3\sqrt{3}}P_L\pm\frac{4S_W^2}{3\sqrt{3}}P_R\right]T_n^0\\
&\quad \left.+\sum_{m=1}^{N_B^\pm}\bar{B}_m^0\gamma_\mu\left[\pm\frac{2(3C_W^2-S_W^2)}{3\sqrt{3}}P_L\mp\frac{2S_W^2}{3\sqrt{3}}P_R\right]B_m^0\right\}
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

donde hemos definido $\Lambda = diag(1,1,-1)$. Los quarks J del cuadro 3.3 se han escrito mediante T_n y B_m ya que sus cargas eléctricas son $2/3$ y $-1/3$ respectivamente, por analogía con los quarks top y bottom. El número de quarks extra $N_T^\pm$ y $N_B^\pm$ depende del valor del parámetro β. Como se ve del cuadro 3.4, para $\beta = -1/\sqrt{3}$ se obtienen dos quarks tipo down (B) y un quark tipo up (T), esto es, $N_T^- = 1$ y $N_B^- = 2$.

Del lagrangiano ec.(3.38), como se discutió en la sección 3.10 podemos ver que los acoplamientos de los quarks usuales con el bosón Z' no son universales. Esto se ve reflejado en la ec.(3.38) a través de la matriz Λ, que no es proporcional a la identidad. Como se ha mencionado, esto produce la presencia de corrientes neutras con cambio de sabor (FCNC) a nivel árbol que involucran a los quarks del ME y el bosón Z'. Ahora bien, también notamos que si se consideran los quarks adicionales presentes en la teoría, no sólo hay FCNC a nivel árbol acopladas al bosón Z', sino también pueden existir FCNC acoplados al bosón Z, debidos a la mezcla de estos nuevos quarks T_n, B_m con los fermiones ordinarios u_i y d_i.

Para el sector leptónico, antes de encontrar los respectivos acoplamientos se debe hacer primero una observación: debido a que la carga eléctrica de los leptones adicionales del modelo (E_j^0) depende de la escogencia de β, podremos tener tres leptones cargados o tres leptones neutros ("neutrinos pesados"). Si definimos el lagrangiano de la corriente neutra leptónica del ME mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC}^{(\ell,ME)} &= gS_W A^\mu \left\{-\bar{e^0}_j\gamma_\mu[P_L+P_R]e_j^0\right\} \\ &\quad -\frac{gZ^\mu}{2C_W}\left\{\bar{e^0}_j\gamma_\mu\left[(-C_W^2+S_W^2)P_L+2S_W^2P_R\right]e_j^0+\bar{\nu^0}_j\gamma_\mu P_L\nu_j^0\right\} \end{aligned} \tag{3.39}$$

obtenemos en el modelo 331 para $\beta = 1/\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC}^{(\ell)} &= \mathcal{L}_{NC}^{(\ell,ME)} + \mathcal{L}_{NC}^{(\ell,NF)} \\ &= \mathcal{L}_{NC}^{(\ell,ME)} + gS_W A^\mu \bar{E^0}_j\gamma_\mu E_j^0 - \frac{gS_W^2 Z^\mu}{C_W}\bar{E^0}_j\gamma_\mu E_j^0 \\ &\quad -\frac{g'Z^{\mu\prime}}{2S_WC_W}\left\{\bar{e^0}_j\gamma_\mu\left[-\frac{(C_W^2+S_W^2)}{\sqrt{3}}P_L-\frac{2S_W^2}{\sqrt{3}}P_R\right]e_j^0\right. \\ &\qquad +\bar{\nu^0}_j\gamma_\mu\left[-\frac{(C_W^2+S_W^2)}{\sqrt{3}}P_L\right]\nu_j^0 \\ &\qquad \left.+\bar{E^0}_j\gamma_\mu\left[\frac{2(C_W^2-S_W^2)}{\sqrt{3}}P_L-\frac{2S_W^2}{\sqrt{3}}P_R\right]E_j^0\right\} \end{aligned} \tag{3.40}$$

donde E_j ($j = 1, 2, 3.$) denotará cada uno de los nuevos leptones cargados. Por otra parte para $\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC}^{(\ell)} &= \mathcal{L}_{NC}^{(\ell,ME)} - \frac{g'Z'^\mu}{2S_WC_W}\left\{\bar{e^0}_j\gamma_\mu\left[-\frac{(C_W^2-S_W^2)}{\sqrt{3}}P_L-\frac{2S_W^2}{\sqrt{3}}P_R\right]e_j^0\right. \\ &\qquad \left.+\bar{\nu^0}_j\gamma_\mu\left[-\frac{(C_W^2-S_W^2)}{\sqrt{3}}P_L\right]\nu_j^0+\bar{N^0}_j\gamma_\mu\left[\frac{2C_W^2}{\sqrt{3}}P_L\right]N_j^0\right\} \end{aligned} \tag{3.41}$$

donde hemos incluido los leptones neutros (neutrinos) exóticos pesados N^0.

Adicionalmente cabe destacar que los bosones de gauge exóticos K_1^μ y K_2^μ, de acuerdo a lo consignado en la tabla 3.1, para los valores que están siendo examinados de β ($\pm 1/\sqrt{3}$) tendrán cargas eléctricas 0 y 1. En particular, si se examina el caso donde $\beta = 1/\sqrt{3}$, K_2^μ tienen carga eléctrica 0 de donde a partir de la ec.(3.36) tenemos la siguiente contribución a las corrientes neutras

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NC}}^{K_2} = -\frac{g}{\sqrt{2}}K_2^\mu\left[\sum_{n=1}^{2}\overline{T^0}_n\gamma_\mu P_L U_n^0+\overline{D^0}_3\gamma_\mu P_L B_1^0+\sum_{j=1}^{3}\overline{L}_j^0\gamma_\mu P_L E_j^0\right]+\mathrm{h.c} \tag{3.42}$$

Para el caso $\beta = -1/\sqrt{3}$ es el bosón K_1^μ el que tiene carga eléctrica 0. En este caso a partir de ec(3.36) se tiene la siguiente contribución

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NC}}^{K_1} = -\frac{g}{\sqrt{2}}K_1^\mu\left[-\sum_{m=1}^{2}\overline{B^0}_m\gamma_\mu P_L D_m^0+\overline{U^0}_3\gamma_\mu P_L T_1^0+\sum_{j=1}^{3}\overline{\nu}_j^0\gamma_\mu P_L N_j^0\right]+\mathrm{h.c} \tag{3.43}$$

Con el fin de introducir expresiones posteriores de los acoplamientos de los fermiones del modelo con los bosones Z y Z', organizaremos los fermiones del ME tipo up U_i^0 y tipo down D_i^0 junto con los fermiones exóticos de igual carga encontrados anteriormente (como se ha mencionado, los superíndices "0" denotan que estamos tratando con autoestados de corriente y no con los estados físicos). Para el caso $\beta = +1/\sqrt{3}$ podemos reescribir los fermiones mediante vectores que toman explícitamente la forma:

$$\mathcal{U}^0 = \begin{pmatrix} U^0 \\ \\ T^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ T_1^0 \\ T_2^0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}^0 = \begin{pmatrix} D^0 \\ \\ B^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^0 \\ d_2^0 \\ d_3^0 \\ B_1^0 \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

$$\mathcal{E}^0 = \begin{pmatrix} e^0 \\ \\ E^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^0 \\ \mu^0 \\ \tau^0 \\ E_1^0 \\ E_2^0 \\ E_3^0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{N}^0 = \begin{pmatrix} \nu_e^0 \\ \nu_\mu^0 \\ \nu_\tau^0 \end{pmatrix}, \tag{3.45}$$

mientras que para $\beta = -1/\sqrt{3}$ se tiene

$$\mathcal{U}^0 = \begin{pmatrix} U^0 \\ \\ T^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ T_1^0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}^0 = \begin{pmatrix} D^0 \\ \\ B^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^0 \\ d_2^0 \\ d_3^0 \\ B_1^0 \\ B_2^0 \end{pmatrix}, \tag{3.46}$$

$$\mathcal{E}^0 = \begin{pmatrix} e^0 \\ \mu^0 \\ \tau^0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{N}^0 = \begin{pmatrix} \nu^0 \\ \\ N^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e^0 \\ \nu_\mu^0 \\ \nu_\tau^0 \\ N_1^0 \\ N_2^0 \\ N_3^0 \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

A partir de esta notación vectorial podemos escribir de una manera más compacta el Lagrangiano de interacción de corrientes neutras ec.(3.38) mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC} = & \sum_{\Psi} -\frac{gZ^\mu}{2C_W}\left\{\bar{\Psi}^0\gamma_\mu\epsilon^{(1)}_{\Psi_{(L)}}P_L\Psi^0 + \bar{\Psi}^0\gamma_\mu\epsilon^{(1)}_{\Psi_{(R)}}P_R\Psi^0\right\} \\ & -\frac{g'Z'^\mu}{2\sqrt{3}S_W C_W}\left\{\bar{\Psi}^0\gamma_\mu\epsilon^{(2)}_{\Psi_{(L)}}P_L\Psi^0 + \bar{\Psi}^0\gamma_\mu\epsilon^{(2)}_{\Psi_{(R)}}P_R\Psi^0\right\} \\ & -\frac{g}{\sqrt{2}}\left\{\bar{\Psi}^0\gamma_\mu\epsilon^{(3)}_{\Psi_{(L)}}P_L\Psi^0\mathrm{Re}K^\mu + i\bar{\Psi}^0\gamma_\mu\epsilon^{(4)}_{\Psi_{(L)}}P_L\Psi^0\mathrm{Im}K^\mu\right\} \end{aligned} \tag{3.48}$$

donde la suma se extiende sobre $\mathcal{U}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{N}$. Los acoplamientos $\epsilon^{(1,2)}_{\Psi_{(L,R)}}$ en general dependerán del parámetro β. Si β es $\pm 1/\sqrt{3}$ para la interacción con el bosón Z^0 se tiene

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{(1)}_{\mathcal{U}_{(L)}} &= \left(C_W^2 - \frac{S_W^2}{3}\right)\mathbf{1}_{(3+N_T^\pm)\times(3+N_T^\pm)} - \begin{pmatrix} 0_{(3\times3)} & \\ & \mathbf{1}_{(N_T^\pm\times N_T^\pm)}\end{pmatrix} , \\
\epsilon^{(1)}_{\mathcal{U}_{(R)}} &= -\frac{4S_W^2}{3}\mathbf{1}_{(3+N_T^\pm)\times(3+N_T^\pm)} \, .
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{(1)}_{\mathcal{D}_{(L)}} &= \left(-C_W^2 - \frac{S_W^2}{3}\right)\mathbf{1}_{(3+N_B^\pm)\times(3+N_B^\pm)} + \begin{pmatrix} 0_{(3\times3)} & \\ & \mathbf{1}_{(N_B^\pm\times N_B^\pm)}\end{pmatrix} , \\
\epsilon^{(1)}_{\mathcal{D}_{(R)}} &= +\frac{2S_W^2}{3}1_{(3+N_B^\pm)\times(3+N_B^\pm)} \, .
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

donde la no universalidad de los acoplamientos con los quarks izquierdos (tipo up o down) se hace evidente. También es interesante notar que en las matrices “derechas” $\epsilon^{(1)}_{\mathcal{U},\mathcal{D}_{(R)}}$ los acoplamientos resultan ser universales. Como es de esperar, los acoplamientos de los quarks ordinarios con el bosón Z son los mismos que en el ME.

Para el bosón Z'^0 de una manera similar obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{(2)}_{\mathcal{U}_{(L)}} &= \left(C_W^2 \pm \frac{S_W^2}{3}\right)\mathbf{1}_{(3+N_T^\pm)\times(3+N_T^\pm)} - 2C_W^2 \begin{pmatrix} 0_{(2\times2)} & \\ & \mathbf{1}_{(N_T^\pm+1)\times(N_T^\pm+1)}\end{pmatrix} \\
&\quad +(C_W^2 \mp 2C_W^2 \pm S_W^2)\begin{pmatrix} 0_{(3\times3)} & \\ & \mathbf{1}_{(N_T^\pm\times N_T^\pm)}\end{pmatrix} , \\
\epsilon^{(2)}_{\mathcal{U}_{(R)}} &= \pm\frac{4S_W^2}{3}\mathbf{1}_{(3+N_T^\pm)\times(3+N_T^\pm)} \, ,
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{(2)}_{\mathcal{D}_{(L)}} &= \left(C_W^2 \pm \frac{S_W^2}{3}\right)\mathbf{1}_{(3+N_B^\pm)\times(3+N_B^\pm)} - 2C_W^2 \begin{pmatrix} 0_{(2\times2)} & \\ & \mathbf{1}_{(N_B^\pm+1)\times(N_B^\pm+1)}\end{pmatrix} \\
&\quad +(C_W^2 \pm 2C_W^2 \mp S_W^2)\begin{pmatrix} 0_{(3\times3)} & \\ & \mathbf{1}_{(N_B^\pm\times N_B^\pm)}\end{pmatrix} , \\
\epsilon^{(2)}_{\mathcal{D}_{(R)}} &= \mp\frac{2S_W^2}{3}\mathbf{1}_{(3+N_B^\pm)\times(3+N_B^\pm)} \, .
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

Para el sector leptónico mostraremos las dos posibilidades diferentes dependientes del parámetro β. Partiendo de la ec. (3.40), para $\beta = 1/\sqrt{3}$ obtenemos los acoplamientos del sector leptónico con Z y Z'

$$
\epsilon^{(1)}_{\mathcal{E}_{(L)}} = \left(-C_W^2 + S_W^2\right)\mathbf{1}_{6\times6} + \begin{pmatrix} 0_{(3\times3)} & \\ & \mathbf{1}_{(3\times3)}\end{pmatrix} , \qquad \epsilon^{(1)}_{\mathcal{E}_{(R)}} = +2S_W^2\mathbf{1}_{6\times6} \, , \tag{3.53}
$$

$$\epsilon^{(2)}_{\mathcal{E}_{(L)}} = -(C_W^2 + S_W^2)\mathbf{1}_{(6\times 6)} + (3C_W^2 - S_W^2)\begin{pmatrix} 0_{(3\times 3)} & \\ & \mathbf{1}_{(3\times 3)} \end{pmatrix}, \qquad \epsilon^{(2)}_{\mathcal{E}_{(R)}} = -2S_W^2\mathbf{1}_{6\times 6}\,, \tag{3.54}$$

mientras que los acoplamientos con los neutrinos permanecen universales para ambas quiralidades,

$$\epsilon^{(1)}_{\mathcal{N}_{(L)}} = \mathbf{1}_{(3\times 3)}\,, \qquad \epsilon^{(2)}_{\mathcal{N}_{(L)}} = -\mathbf{1}_{(3\times 3)}\,. \tag{3.55}$$

Para $\beta = -1/\sqrt{3}$, a partir de la ec. (3.41) se obtiene

$$\epsilon^{(1)}_{\mathcal{N}_{(L)}} = \mathbf{1}_{(3\times 3)}\,, \qquad \epsilon^{(2)}_{\mathcal{N}_{(L)}} = -(C_W^2 - S_W^2)\mathbf{1}_{(6\times 6)} + (3C_W^2 - S_W^2)\begin{pmatrix} 0_{(3\times 3)} & \\ & \mathbf{1}_{(3\times 3)} \end{pmatrix}. \tag{3.56}$$

donde en este caso los acoplamientos que permanecen universales son;

$$\epsilon^{(1)}_{\mathcal{E}_{(L)}} = \left(-C_W^2 + S_W^2\right)\mathbf{1}_{(3\times 3)}\,, \qquad \epsilon^{(1)}_{\mathcal{E}_{(R)}} = +2S_W^2\mathbf{1}_{6\times 6}\,, \tag{3.57}$$

$$\epsilon^{(2)}_{\mathcal{E}_{(L)}} = -(C_W^2 - S_W^2)\mathbf{1}_{(3\times 3)}\,, \qquad \epsilon^{(2)}_{\mathcal{E}_{(R)}} = -2S_W^2\mathbf{1}_{6\times 6}\,. \tag{3.58}$$

Por último, para el bosón K_2^μ, cuando $\beta = 1/\sqrt{3}$ se obtiene

$$\epsilon^{(3)}_{\mathcal{U}_{(L)}} = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & & \mathbf{1}_{2\times 2} \\ & 0 & \\ \mathbf{1}_{2\times 2} & & 0_{2\times 2} \end{pmatrix}, \qquad \epsilon^{(3)}_{\mathcal{D}_{(L)}} = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\epsilon^{(3)}_{\mathcal{E}_{(L)}} = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_{3\times 3} \\ \mathbf{1}_{3\times 3} & \end{pmatrix}, \tag{3.59}$$

$$\epsilon^{(4)}_{\mathcal{U}_{(L)}} = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & & \mathbf{1}_{2\times 2} \\ & 0 & \\ -\mathbf{1}_{2\times 2} & & 0_{2\times 2} \end{pmatrix}, \qquad \epsilon^{(4)}_{\mathcal{D}_{(L)}} = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\epsilon^{(4)}_{\mathcal{E}_{(L)}} = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_{3\times 3} \\ -\mathbf{1}_{3\times 3} & \end{pmatrix}. \tag{3.60}$$

Análogamente para el caso donde $\beta = -1/\sqrt{3}$ se obtiene para el bosón K_1^μ

$$\epsilon^{(3)}_{\mathcal{U}_{(L)}} = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon^{(3)}_{\mathcal{D}_{(L)}} = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & & -\mathbf{1}_{2\times 2} \\ & 0 & \\ -\mathbf{1}_{2\times 2} & & 0_{2\times 2} \end{pmatrix},$$
$$\epsilon^{(3)}_{\mathcal{N}_{(L)}} = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_{3\times 3} \\ \mathbf{1}_{3\times 3} & \end{pmatrix}, \tag{3.61}$$

$$\epsilon^{(4)}_{\mathcal{D}_{(L)}} = \begin{pmatrix} 0_{2\times2} & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \epsilon^{(4)}_{\mathcal{U}_{(L)}} = \begin{pmatrix} 0_{2\times2} & & \mathbf{1}_{2\times2} \\ & 0 & \\ -\mathbf{1}_{2\times2} & & 0_{2\times2} \end{pmatrix} ,$$
$$\epsilon^{(4)}_{\mathcal{N}_{(L)}} = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_{3\times3} \\ -\mathbf{1}_{3\times3} & \end{pmatrix} . \tag{3.62}$$

Es importante recordar que los acoplamientos descriptos en las ecs.(3.48)-(3.62) están escritos en términos de estados de interacción $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{D}^0$, $\mathcal{E}^0$ y $\mathcal{N}^0$. Las rotaciones generales para pasar a autoestados de masa se obtienen a partir de la diagonalización de las matrices de masa, provenientes del sector de Yukawa del modelo. Como se mencionó previamente, debido a que el sector de Yukawa del modelo posee en su descripción un gran número de parámetros libres, consideraremos matrices unitarias arbitrarias.

Los autoestados de masa $\mathcal{U}$, $\mathcal{D}$ se definen por tanto mediante la introducción de matrices de rotación unitarias de dimensión $(3+N_T^{\pm}) \times (3+N_T^{\pm})$ y $(3+N_B^{\pm}) \times (3+N_B^{\pm})$ para los sectores de quarks tipo up y down respectivamente:

$$\mathcal{U}_L^0 = V_L^u \, \mathcal{U}_L \quad , \quad \mathcal{D}_L^0 = V_L^d \, \mathcal{D}_L \ . \tag{3.63}$$

La inclusión de las matrices de mezcla hace necesario un análisis de la corriente cargada ec.(3.37). Debido a que en el presente trabajo doctoral solo se estudiará el sector de quarks del modelo 331, podemos reescribir la ec.(3.37) en términos de ec.(3.44) y ec.(3.46) mediante

$$\mathcal{L}^{(cc)} \ = \ - \frac{g}{\sqrt{2}} \, \bar{\mathcal{U}}_L^0 \, \gamma^\mu \, \mathcal{P} \, \mathcal{D}_L^0 \, W_\mu^+ \ + \ \text{h.c.} \ , \tag{3.64}$$

donde $\mathcal{P}$ para $\beta = -1/\sqrt{3}$ debe tener dimensión 4×5,

$$\mathcal{P} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.65}$$

y para $\beta = 1/\sqrt{3}$ corresponde a la transpuesta de la matriz anterior $\mathcal{P}^T$. Es importante enfatizar que fue necesario incluir esta nueva matriz $\mathcal{P}$ a fin de reproducir las interacciones del sector de quarks ordinarios (ME) con el bosón $W^{\pm}$ y debido a que las dimensiones de las matrices tipo up $V_{R,L}^u$ y tipo down $V_{R,L}^d$ son diferentes. Cabe notar que los quarks exóticos transforman como singuletes bajo transformaciones de $SU(2)_L$, por lo cual no se acoplan a los bosones $W^{\pm}$.

Es útil agrupar los elementos de las matrices $V_L^{u,d}$ en submatrices (no cuadráticas) definidas convenientemente,

$$V_L^u \ = \ \begin{pmatrix} V^u_{0\,(3\times3)} & V^u_{X\,(3\times N_T^{\pm})} \\ V^u_{Y\,(N_T^{\pm}\times3)} & V_{T\,(N_T^{\pm}\times N_T^{\pm})} \end{pmatrix} \ \text{y} \ V_L^d \ = \ \begin{pmatrix} V^d_{0\,(3\times3)} & V^d_{X\,(3\times N_B^{\pm})} \\ V^d_{Y\,(N_B^{\pm}\times3)} & V_{B\,(N_B^{\pm}\times N_B^{\pm})} \end{pmatrix} . \tag{3.66}$$

Véase que la matriz de mezcla $V_{CKM} = V_0^{u\dagger} V_0^d$ que actúa sobre el sector de quarks del ME en general no es unitaria. En términos de las matrices de rotación, puede escribirse

$$V_{CKM} = V_L^{u\dagger} \mathcal{P} V_L^d \tag{3.67}$$

De este modo, en la base de autoestados de masa de quarks los acoplamientos de la ec. (3.64) estarán dados mediante

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(cc)} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\mathcal{U}}_L \, \gamma^\mu \, V_L^{u\dagger} \, \mathcal{P} \, V_L^d \, \mathcal{D}_L \, W_\mu^+ \; + \; \text{h.c.} \\
&= -\frac{g}{\sqrt{2}} \Big[\bar{U}_L \, \gamma^\mu V_{CKM}^0 \, D_L \; + \; \bar{U}_L \, \gamma^\mu V_0^{u\dagger} V_X^d \, B_L \\
&\qquad + \bar{T}_L \, \gamma^\mu V_X^{u\dagger} V_0^d \, D_L \; + \; \bar{T}_L \, \gamma^\mu V_X^{u\dagger} V_X^d \, B_L \Big] W_\mu^+ \; + \; \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Adicionalmente a las matrices de mezcla introducidas para el sector de quarks, se debe tener en cuenta la mezcla entre los bosones de gauge neutros. Por el momento supondremos que lo valores esperados en el vacío de los estados escalares del modelo son reales. Esta suposición depende de la estructura del potencial escalar, e implica que no existirá violación espontánea de la simetría CP. Considerando este caso particular, el estado $\sqrt{2}\text{Im}K$ se desacopla, estableciéndose en un autoestado de masa exacto [27, 34, 36]. Sin embargo, los bosones vectoriales Z^μ, Z'^μ y $\sqrt{2}\text{Re}K$ en general se mezclarán. Se puede obtener la base de masa (Z_1, Z_2 y Z_3) mediante una matriz ortogonal de mezcla, que dependerá de los valores de expectación de vacío de los campos escalares:

$$\begin{pmatrix} Z \\ Z' \\ \sqrt{2}\text{Re}K \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

De esta forma en la base de masa de los fermiones y bosones de gauge las corrientes neutras para el sector de quarks pueden escribirse mediante

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{NC} &= -\sum_{\Psi = \mathcal{U}, \mathcal{D}} \Big[Q_\Psi \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \, A_\mu \; + \sum_{j,k=1}^{3} g_j \bar{\Psi} \gamma^\mu (E_{\Psi_L}^{(j)} P_L + E_{\Psi_R}^{(j)} P_R) \Psi \, R_{jk} \, Z_{k\mu} \\
&\qquad + i \, \frac{g}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu (E_{\Psi_L}^{(4)} P_L + E_{\Psi_R}^{(4)} P_R) \Psi \, \sqrt{2} \, \text{Im}K_\mu \Big] \; ,
\end{aligned} \tag{3.70}$$

donde Q_Ψ designa la carga eléctrica del fermión, y las constantes de acoplamiento g_j están definidas mediante

$$g_1 = \frac{g}{2C_W} \; , \qquad g_2 = \frac{g'}{2\sqrt{3} S_W C_W} = \frac{g}{2\sqrt{3} C_W \sqrt{C_W^2 - \beta^2 S_W^2}} \; , \qquad g_3 = \frac{g}{2} \; , \tag{3.71}$$

y las matrices $E_{\Psi_{L,R}}^{(i)}$ están dadas por

$$E_{\Psi_L}^{(i)} = V_L^{\Psi\dagger} \epsilon_{\Psi_L}^{(i)} V_L^\Psi \; , \qquad E_{\Psi_R}^{(i)} = V_R^{\Psi\dagger} \epsilon_{\Psi_R}^{(i)} V_R^\Psi = \epsilon_{\Psi_R}^{(i)} \; . \tag{3.72}$$

En adelante estudiaremos las corrientes neutras que cambian sabor (FCNC), y que involucran quarks ordinarios (u, c, t, d, s, b). Es razonable esperar que la presencia de FCNC a nivel árbol, imponga cotas significativas sobre los parámetros del modelo y de igual forma sugiera estudiar observables que puedan evidenciar efectos de nueva física medibles a la escala de energía alcanzable en la actualidad. Nos concentraremos por tanto, en las submatrices superiores izquierdas de dimension 3×3 que se encuentran en las matrices de sabor izquierdas $E^{(i)}_{\Psi_L}$, que en general no son diagonales. Para $i = 1, 2$ podemos separar una parte diagonal, originada por los primeros términos de las ecuaciones (3.49-3.52), que permanecen inalterados bajo la rotación. De esta forma podemos escribir

$$E^{(i)}_{\Psi_L} \;=\; E^{(i,\mathrm{diag})}_{\Psi_L} + \Delta E^{(i)}_{\Psi_L} \, . \tag{3.73}$$

Mediante el uso de las definiciones introducidas en la ec. (3.66), los términos $\Delta E^{(i)}_{\Psi_L}$ de las submatrices superiores izquierdas de dimension 3×3 estarán dados mediante

$$\Delta E^{(1)}_{\mathcal{U}_L\,,3\times 3} = -(\mathbf{1}_{3\times 3} - V_0^{u\dagger} V_0^u)\,, \tag{3.74}$$

$$\Delta E^{(1)}_{\mathcal{D}_L\,,3\times 3} = \mathbf{1}_{3\times 3} - V_0^{d\dagger} V_0^d\,, \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}\Delta E^{(2)}_{\mathcal{U}_L\,,3\times 3} \;&=\; -2C_W^2 \left[V_0^{u\dagger} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} V_0^u + V_Y^{u\dagger} V_Y^u \right] \\ &\quad +(C_W^2 \mp 2C_W^2 \pm S_W^2) \left(\mathbf{1}_{3\times 3} - V_0^{u\dagger} V_0^u \right)\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}\Delta E^{(2)}_{\mathcal{D}_L\,,3\times 3} \;&=\; -2C_W^2 \left[V_0^{d\dagger} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} V_0^d + V_Y^{d\dagger} V_Y^d \right] \\ &\quad +(C_W^2 \pm 2C_W^2 \mp S_W^2) \left(\mathbf{1}_{3\times 3} - V_0^{d\dagger} V_0^d \right)\end{aligned} \tag{3.77}$$

donde los dobles signos corresponden a $\beta = \pm 1/\sqrt{3}$. De forma similar, podemos escribir la FCNC relacionada con el bosón vectorial K. A fin de tener una notación uniforme, mantendremos la definición de la ec. (3.73), siendo $E^{(i,\mathrm{diag})}_{\Psi_L} = 0$ para $i = 3, 4$. Por tanto para $\beta = 1/\sqrt{3}$ tenemos

$$\Delta E^{(3)}_{\mathcal{U}_L\,,3\times 3} = V_0^{u\dagger} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_Y^u + V_X^{u\dagger} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} V_0^u \tag{3.78}$$

$$\Delta E^{(3)}_{\mathcal{D}_L\,,3\times 3} = V_Y^{d\dagger} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V_Y^d \tag{3.79}$$

$$\Delta E^{(4)}_{\mathcal{U}_L\,,3\times3} = V_0^{u\dagger}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} V_Y^u - V_X^{u\dagger}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} V_0^u \tag{3.80}$$

$$\Delta E^{(4)}_{\mathcal{D}_L\,,3\times3} = V_Y^{d\dagger}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} V_Y^d \tag{3.81}$$

Por último, para $\beta = -1\sqrt{3}$, existirá una corriente neutra mediada por el bosón vectorial K_2. Se obtendrán expresiones similares a las anteriores, mediante los cambios $\Delta E^{(3,4)}_{\mathcal{U}_L,3\times3} \rightarrow -\Delta E^{(3,4)}_{\mathcal{D}_L,3\times3}$ y $\Delta E^{(3,4)}_{\mathcal{D}_L,3\times3} \rightarrow \Delta E^{(3,4)}_{\mathcal{U}_L,3\times3}$. Un análisis más detallado de los acoplamientos mostrados en esta sección puede verse en la Ref.[1].

Cuadro 3.3: Espectro de fermiones en el modelo 331 consistente con el ajuste de anomalías.

Representación	Q_ψ	X_ψ
$q_{mL} = \begin{pmatrix} d_m \\ -u_m \\ J_m \end{pmatrix}_L : 3^* \quad m = 1, 2.$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}\beta}{2} \end{pmatrix}$	$X^L_{q_m} = -\frac{1}{6} - \frac{\beta}{2\sqrt{3}}$
$d_{mR} : \mathbf{1} \;\; m = 1, 2.$ $u_{mR} : \mathbf{1} \;\; m = 1, 2.$ $J_{mR} : \mathbf{1} \;\; m = 1, 2.$	$-\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$	$X^R_{d_m} = -\frac{1}{3}$ $X^R_{u_m} = \frac{2}{3}$ $X^R_{J_m} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$
$q_{3L} = \begin{pmatrix} u_3 \\ d_3 \\ J_3 \end{pmatrix}_L : 3$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}\beta}{2} \end{pmatrix}$	$X^L_{q^{(3)}} = \frac{1}{6} - \frac{\beta}{2\sqrt{3}}$
$u_{3R} : \mathbf{1}$ $d_{3R} : \mathbf{1}$ $J_{3R} : \mathbf{1}$	$-\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$	$X^R_b = -\frac{1}{3}$ $X^R_t = \frac{2}{3}$ $X^R_{J_3} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$
$\ell_{kL} = \begin{pmatrix} \nu_k \\ e^-_k \\ E^{Q_E}_k \end{pmatrix}_L : 3 \;\; k = 1, 2, 3.$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\beta}{2} \end{pmatrix}$	$X^L_{\ell_k} = -\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{3}}$
$e^-_{kR} : \mathbf{1} \;\; k = 1, 2, 3.$ $E^{-Q_E}_k : \mathbf{1} \;\; k = 1, 2, 3.$	-1 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$	$X^R_{e_k} = -1$ $X^R_{E_k} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$

Cuadro 3.4: Contenido fermiónico para tres generaciones con $\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

	Q_ψ	X_ψ
$q_{mL} = \begin{pmatrix} d_m \\ -u_m \\ B_m \end{pmatrix}_L : \mathbf{3}^*$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$X^L_{q^{(m)}} = 0$
$d_{mR},\, u_{mR},\, B_{mR} : \mathbf{1}$	$-\frac{1}{3},\, \frac{2}{3},\, -\frac{1}{3}$	$X^R_{q_m} = Q_{q_m}$
$q_{3L} = \begin{pmatrix} u_3 \\ d_3 \\ T \end{pmatrix}_L : \mathbf{3}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$	$X^L_{q^{(3)}} = \frac{1}{3}$
$u_{3_R},\, d_{3_R},\, T_R : \mathbf{1}$	$\frac{2}{3},\, -\frac{1}{3},\, \frac{2}{3}$	$X^R_{q^{(3)}} = Q_{q^{(3)}}$
$\ell_{jL} = \begin{pmatrix} \nu_j \\ e_j \\ N_j \end{pmatrix}_L : \mathbf{3}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$X^L_{\ell_j} = -\frac{1}{3}$
$(e_j)_R : \mathbf{1}$	-1	$X^R_{\ell_j} = Q_{\ell_j}$